

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangannya, matematika telah banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan nyata yang dihadapi oleh manusia. Untuk memahami dan menyelesaikan masalah-masalah nyata, dibutuhkan model matematika tertentu yang bisa merepresentasikan masalah tersebut. Model matematika adalah pendeskripsian terhadap suatu sistem, secara matematika, dan dibentuk dengan suatu tujuan tertentu. Sering kali, asumsi dari sistem melibatkan laju perubahan dari satu atau lebih variabel, dan dideskripsikan oleh matematika dengan turunan [1]. Oleh karena itu, suatu persamaan diferensial atau suatu sistem persamaan diferensial digunakan untuk memodelkan suatu sistem. Pada umumnya, persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung satu atau lebih fungsi turunan yang tidak diketahui, terhadap satu atau lebih variabel bebas [1].

Persamaan (1.1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1.1)$$

adalah sebuah contoh dari persamaan diferensial, dengan y merupakan fungsi yang diturunkan terhadap x yang tidak diketahui, dan f adalah fungsi terhadap x yang diketahui.

Bifurkasi adalah sebuah situasi dimana terjadi perubahan yang signifikan pada pergerakan sistem yang diakibatkan oleh perubahan-perubahan kecil dari parameter model. Dalam sejarah, bifurkasi sistem pertama kali disebutkan dalam pekerjaan matematikawan Perancis *Henri Poincaré*. Studi mengenai bifurkasi mempelajari bagaimana perubahan sistem terjadi ketika satu atau lebih parameter berubah secara terus-menerus. Titik dimana bifurkasi terjadi disebut sebagai titik bifurkasi [2].

Salah satu sistem yang dapat dimodelkan dengan matematika adalah sistem penyebaran virus. Pemodelan sistem virus sangat penting bagi para ilmuwan dalam bidang medis, karena dapat memberikan informasi mengenai pergerakan dan interaksi virus dengan berbagai komponen [3]. Dari berbagai pemodelan sistem virus yang ada, pemodelan sistem penyebaran virus *Human Immunodeficiency Virus type 1* (HIV-1) merupakan salah satu model yang sangat penting. Hal ini dikarenakan penyebab utama *Acquired Immune Deficiency Syndrome* (AIDS) adalah HIV, yang sampai saat ini masih belum dapat disembuhkan dan masih

menjadi permasalahan kesehatan global. *Highly Active Anti-Retroviral Therapy* (HAART) merupakan terapi yang cukup umum digunakan orang-orang dengan HIV, dimana pasien diberikan kombinasi dari tiga atau lebih obat dari beberapa kelas yang berbeda, yang dapat mengurangi tingkat replikasi HIV hingga ke suatu level dimana virus tidak dapat dideteksi. Walaupun begitu, virus masih ada di dalam tubuh, dan hal ini terjadi karena HIV dapat melakukan *latent infection* pada sel-T memori dengan reseptor CD4⁺ yang membuat virus bersembunyi di dalam sel-T selama terapi. Sel-T seperti ini yang membuat seseorang sulit disembuhkan dari HIV.

Virus yang masuk ke dalam tubuh manusia tidak dapat melakukan replikasi secara mandiri, oleh karena itu virus membutuhkan *host cell* untuk bereplikasi. Dalam kasus HIV-1, virus akan menyerang sel-T pembantu, yaitu sel-T dengan reseptor CD4⁺ yang biasa juga disebut sel-T CD4⁺, memasukkan DNA-nya ke dalam DNA *host cell* untuk memaksa *host cell* memproduksi virus baru, dan membunuhnya. Salah satu cara untuk mengecek infeksi HIV adalah dengan melakukan tes CD4, yaitu tes untuk mengetahui konsentrasi sel-T pembantu dalam tubuh. Orang dengan HIV biasanya memiliki konsentrasi sel-T pembantu yang lebih rendah dari pada umumnya. Untuk meresponi infeksi virus yang terjadi, sistem imun tubuh akan mengaktifkan *cytotoxic T lymphocytes* (CTLs), yaitu sel-T pembunuh yang dapat mengenali dan membunuh sel-sel yang terinfeksi dengan mengaktifkan apoptosis (kematian sel terprogram) pada sel-sel tersebut [3]. Setelah tingkat konsentrasi virus sudah tidak terdeteksi, CTLs akan berubah menjadi *cytotoxic T lymphocyte precursors* (CTLp) dengan reseptor yang dapat mengenali dan mengingat virus-virus yang pernah menginfeksi tubuh. Jika virus yang sama terdeteksi dalam tubuh, CTLp akan berubah menjadi *cytotoxic T lymphocyte effectors* (CTLe) dan akan membunuh virus tersebut [4].

Untuk mempelajari penyebaran HIV-1 dalam tubuh manusia, beberapa model telah dicetuskan. Salah satu contoh model yang telah dicetuskan adalah model sistem HIV-1 5-dimensi sebagai berikut [3]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \gamma - dx(t) - \beta x(t)v(t), \\
 \dot{y}(t) &= \beta x(t)v(t) - ay(t) - py(t)z(t), \\
 \dot{v}(t) &= ky(t) - uv(t), \\
 \dot{w}(t) &= cy(t)w(t) - cqy(t)w(t) - bw(t), \\
 \dot{z}(t) &= cqy(t)w(t) - hz(t),
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

dengan titik di atas variabel menandakan turunan terhadap waktu t , dan variabel x , y , v , w , dan z merepresentasikan konsentrasi sel yang tidak terjangkit, konsentrasi sel yang terjangkit, konsentrasi virus, konsentrasi sel CTLp, dan konsentrasi sel CTLe secara berturut-turut.

Pada Skripsi ini, akan dicari bifurkasi dan bentuk normal dari bifurkasi yang muncul pada sistem (1.2), lalu dilanjutkan dengan simulasi numerik yang akan memperlihatkan bifurkasi yang muncul beserta dinamik sistem berdasarkan nilai parameter bifurkasi yang dipilih.

1.2 Rumusan Masalah

Berlandaskan latar belakang, diinginkan penelitian ini menjawab permasalahan-permasalahan berikut.

1. Bagaimana klasifikasi dinamika sistem berdasarkan parameternya?
2. Bagaimana bifurkasi yang muncul dari solusi?
3. Bagaimana bentuk normal dari bifurkasi yang muncul?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui klasifikasi dinamika sistem berdasarkan parameternya.
2. Mengetahui bifurkasi yang muncul dari solusi.
3. Mengetahui bentuk normal dari bifurkasi yang muncul.

1.4 Batasan Masalah

Asumsi dan batasan masalah yang dipakai untuk mencapai tujuan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menggunakan model sistem penyebaran HIV-1 5-dimensi.
2. Menggunakan d dan b sebagai parameter bifurkasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat-manfaat dari penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1.5.1 Manfaat Teoritis

1. Dapat mengetahui proses pengklasifikasian dinamika sistem dari model persamaan diferensial.
2. Dapat mengetahui bifurkasi dan bentuk normal bifurkasi yang muncul dari model persamaan diferensial.

1.5.2 Manfaat Praktis

Mengetahui penggunaan praktis dari persamaan diferensial dalam berbagai permasalahan yang ada di dunia nyata.

1.6 Struktur Penelitian

Struktur penulisan dalam Skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Pada Bab I dibahas mengenai latar belakang dilaksanakannya penelitian, rumusan permasalahan yang ingin dijawab, tujuan-tujuan yang ingin diperoleh, batasan-batasan masalah yang dipakai, manfaat dilaksanakannya penelitian, dan struktur penelitian mengenai Skripsi ini.
2. Pada Bab II dibahas teori maupun definisi yang dipakai dalam Skripsi, sebagai referensi untuk mencapai tujuan-tujuan dari penelitian. Teori-teori yang akan dibahas adalah Pengantar Aljabar Linier, Persamaan Diferensial, dan Bifurkasi.
3. Pada Bab III dilihat langkah-langkah yang akan dipakai untuk melakukan analisis dan simulasi model.
4. Pada Bab IV diberikan penjelasan mengenai analisis dinamika sistem, analisis bifurkasi yang muncul beserta bentuk normalnya, dan pembahasan hasil simulasi numerik yang diperoleh.
5. Pada Bab V dibahas penjelasan mengenai kesimpulan dari hasil analisis yang didapatkan dan saran untuk melakukan penelitian yang lebih efektif.