BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah kumpulan dari variabel acak yang dapat merepresentasikan sebuah himpunan dari solusi acak yang dihasilkan dari perubahan dari sebuah sistem dari waktu ke waktu. Proses deterministik mempunyai *path* yang jelas sehingga dapat mendeskripsikan sebuah proses. Proses stokastik tidak mempunyai *path* yang pasti untuk sebuah proses. Proses stokastik merupakan proses diskrit ketika variabel waktu adalah bilangan bulat positif dan proses kontinu ketika variabel waktu adalah bilangan riil positif. Secara matematis, proses stokastik adalah kumpulan dari variabel acak $\{X_t\}_{t\in T}$ yang terdefinisi pada ruang peluang (Ω, P), dengan asumsi nilai dari X_t dalam ruang S untuk setiap t yang terdapat dalam ruang parameter T [1].

2.2 *Random Walk*

Misalkan $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ adalah variabel acak yang i.i.d. sedemikian sehingga $Y_i = \pm 1$ untuk $i \in \mathbb{N}$ dengan peluang yang sama. Misalkan $X_0 = 0$ dan

$$X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n, \tag{2.1}$$

untuk $n \geq 1$, maka distribusi peluang dari barisan $\{X_0, X_1, ..., X_n\}$ merupakan proses stokastik diskrit yang disebut *random walk* [4]. Sebuah distribusi peluang dikatakan *random walk* jika memenuhi sifat dibawah ini.

1. $E[X_n] = 0$, untuk semua n.
2. Untuk semua $0 = n_0 \leq n_1 \leq ... \leq n_r$, variabel acak $X_{n_{i+1}} - X_{n_i}$, untuk $0 \leq i \leq r-1$ bersifat independen.
3. Untuk semua $h \geq 1$ dan $n \geq 0$, distribusi $X_{n+h} - X_n$ sama dengan distribusi X_h.

Diketahui $E[X_i]$ dan $Var(X_i) = E[X_1^2] = 1$. Berdasarkan persamaan (2.1), rata-rata dari random walk memenuhi

$$E[X_n] = E[Y_1] + E[Y_2] + ... + E[Y_n], \tag{2.2}$$

untuk $n \geq 1$. Berdasarkan persamaan (2.1), variansi dari *random walk* akan memenuhi

$$Var(X_n) = Var(Y_1) + Var(Y_2) + ... + Var(Y_n) = nVar(Y_1) = n, \qquad (2.3)$$

untuk $n \geq 1$ dan nilai variansi dari jumlah variabel independen sama dengan jumlah dari variansi [4].

2.3 *Brownian Motion*

2.3.1 *Standard Brownian Motion*

Proses *One-dimensional standard Brownian motion* (SBM) adalah proses stokastik kontinu $\{W_t\}_{t\geq 0}$ pada ruang peluang (Ω, P) dengan sifat-sifat sebagai berikut.

1. Proses SBM dimulai di t_0 atau $P(W(t_0)) = 1$.
2. Untuk $0 \leq s \leq t$, distribusi $W(t) - W(s)$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi $t - s$ yang merupakan panjang dari interval.
3. Untuk $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$, variabel $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_k) - W(t_{k-1})$ adalah variabel random yang independen jika interval $[t_{k-1}, t_k]$ tidak tumpang tindih.

Path yang terpilih berdasarkan *Brownian motion* didefinisikan sebagai *sample Brownian path* [1]. Berdasarkan sifat-sifat *Brownian motion*, terdapat beberapa fakta mengenai *Brownian motion*.

1. Sering melewati sumbu x.
2. Mempunyai hubungan yang erat dengan kurva $x = y^2$.
3. Untuk $t \geq 0$, *Brownian motion* hampir tidak dapat terdiferensiasi.

2.4 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan matematika yang mengandung satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Sebuah PDB dikatakan berordo n jika turunan ke n dari fungsi y yang tidak diketahui adalah turunan terakhir dari y. Konsep tentang ordo memberikan klasifikasi terhadap PDB ordo 1, ordo 2, dan seterusnya. PDB berordo n mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x). \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) adalah bentuk umum PDB berordo n dengan $p_0, \ldots, p_{n-1}$ dan fungsi r merupakan fungsi dari x. Koefisien dari $y^{(n)} = 1$ menandakan (2.4) merupakan bentuk standar. Jika $r(x) = 0$, maka persamaan (2.4) adalah persamaan yang homogen. Jika $r(x) \neq 0$, maka persamaan (2.4) merupakan persamaan yang tidak homogen [5].

2.5 Persamaan Diferensial Stokastik

Persamaan diferensial stokastik mempunyai bentuk umum:

$$dX(t) = f(X(t),t)dt + g(X(t),t)dW(t), \quad t \in [t_0, T], \quad T > 0 \tag{2.5}$$

dengan kondisi awal $X(t) = X_0$. Dengan $W(t)$ adalah *Brownian motion*, fungsi X adalah solusi dari persamaan (2.5) yang memenuhi

$$X(T) = \int_0^T f(X(t),t)dt + \int_0^T g(X(t),t)dW(t), \tag{2.6}$$

dengan menggunakan teorema *existence and uniqueness*, solusi untuk persamaan (2.5) dapat dikatakan solusi yang tunggal [1]. Adapun teorema *existence and uniqueness* berbunyi sebagai berikut:

Proposition 2.5.1. *Teorema Existence and Uniqueness*

Jika koefisien pada persamaan (2.5) memenuhi

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 + |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq k|x-t|^2, \tag{2.7}$$

untuk konstanta k dan $t \in [t_0, T], T > 0$; dan

$$|f(x,t)|^2 + |g(x,t)|^2 \leq k^2\left(1 + |x|^2\right), \tag{2.8}$$

untuk konstanta k^2 *dan semua* $t \in [t_0, T], T > 0$*, maka terdapat solusi kontinu* X_t *dari* (2.5).

2.6 Model Stokastik Pertumbuhan Populasi

Persamaan populasi adalah salah satu penerapan proses deterministik dalam proses stokastik. Sudah merupakan sebuah fakta bahwa populasi biologis memperlihatkan bagian dari perilaku proses stokastik dan *environmental noise* yang merupakan komponen integrasi dari model dinamika populasi. *Noise* yang umum digunakan dalam proses stokasik adalah proses *Brownian motion* [1].

Secara umum, model dinamika populasi mempunyai komponen determinisitik dan stokastik yang mempunyai fungsi yang berbeda. Komponen deterministik berfungsi untuk membuat ukuran variabel respon yang dapat diprediksi melalui kondisi awal, sedangkan untuk komponen stokastik biasanya dapat dikaitkan melalui hal-hal berikut [1].

1. *Demographic stochasticity*: merujuk ke faktor acak yang dapat mempengaruhi individu seperti reproduksi dan kematian.

2. *Environmental stochasticity*: merujuk ke pengaruh faktor-faktor seperti cuaca, wabah, dan bencana alam terhadap populasi kecil dan besar.

3. *Mensuration stochasticity*: merujuk ke *error* yang didapatkan melalui menentukan. Misalkan menentukan jumlah populasi pada titik tertentu.

4. *Informational stochasticity*: merujuk ke kemungkinan terjadinya *error* karena kelalaian ketika melakukan pemodelan.

Model stokastik yang digunakan dalam persamaan populasi adalah *one-dimensional deterministic model*. Model tersebut mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)f(X), \quad X(0) = X_0, \tag{2.9}$$

dengan X adalah laju pertumbuhan populasi dan $f(X)$ adalah pertumbuhan populasi per kapita yang bergantung pada X. Jika $f(X)$ adalah konstan, maka persamaan (2.9) mempunyai solusi

$$X(t) = X_0 e^{at} \tag{2.10}$$

untuk a adalah konstanta. Jika $f(X)$ merupakan sebuah fungsi yang dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor, maka $f(X)$ dapat didefinisikan sebagai

$$f(X) = r(t) + j(t).noise, \tag{2.11}$$

untuk $r(t)$ dan $j(t)$ adalah fungsi terhadap t dan *noise* adalah *random error* yang merupakan *one-dimensional noise*. Berdasarkan persamaan (2.11), persamaan (2.9) dapat dimodifikasikan menjadi persamaan diferensial stokastik

$$\frac{dX(t)}{dt} = r(t)X(t) + j(t)X(t).noise, \quad X(0) = X_0. \tag{2.12}$$

Dengan integrasi, solusi persamaan (2.12) adalah

$$X(t) = X_0 + \int_0^t r(s)X(s)ds + \int_0^t j(s)X(s).noise.ds. \tag{2.13}$$

Untuk menghitung $\int_0^t j(s)X(s).noise.ds$, diperlukan sebuah proses stokastik yang dapat merepresentasikan *noise*. Salah satu pilihan yang umum digunakan adalah *white noise* dengan persamaan $\dot{W}(t) = \frac{dW(t)}{dt}$ yang merupakan fungsi derivatif dari proses *Brownian motion* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ [1]. Sehingga, persamaan (2.13) menjadi

$$X(t) = X_0 + \int_0^t r(s)X(s)ds + \int_0^t j(s)X(s)dW(s). \tag{2.14}$$

Jika $r(t) = r$ dan $a(t) = a$ untuk a dan r adalah konstan dan *noise* yang sudah disubtitusi oleh fungsi derivatif proses *Brownian motion*, maka persamaan (2.12) akan menjadi

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(r + a\frac{dW(t)}{dt}\right)X(t), \quad X(0) = X_0, \quad t \geq 0, \tag{2.15}$$

atau

$$dX(t) = rX(t)dt + aX(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad t \geq 0.$$

Solusi dari persamaan (2.15) adalah

$$X(t) = X_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}a^2\right)t + aW_t}, \tag{2.16}$$

yang merupakan proses *geometric Brownian motion* [1].

2.7 Bifurkasi Stokastik

Bifurkasi stokastik adalah transisi kualitatif dari distribusi peluang stasioner. Secara umum, bifurkasi stokastik dibagi menjadi dua macam: *phenomenological P-bifurcation* dan *dynamical D-bifurcation* [6]. Bifurkasi stokastik yang akan dianalisis dalam Skripsi ini adalah *phenomenological P-bifurcation*.

2.7.1 *Phenomenological P-bifurcation*

Stochastic P-bifurcation adalah bifurkasi stokastik yang terjadi pada sebuah sistem acak. *Stochastic P-bifurcation* dapat terlihat ketika sebuah fungsi kepadatan peluang yang diketahui berubah secara natural. *Stochastic P-bifurcation* dapat dipengaruhi oleh *fractional-order* α dan *noise intensity* σ [7].

2.7.2 *Dynamical D-bifurcation*

Dynamical D-bifurcation adalah bifurkasi pada persamaan diferensial stokastik. *Dynamical D-bifurcation* dapat dianalisis melalui perubahan tanda pada *Lyapunov exponential* tertinggi. *Dynamical D-bifurcation* adalah konsep bifurkasi stokastik yang dinamis [6].

2.8 Analisis Bifurkasi 1 dan Bifurkasi 2

Analisis bifurkasi 1 dan bifurkasi 2 adalah bifurkasi stokastik yang dibahas dalam Skripsi ini. Bifurkasi 1 ditentukan dengan menganalisis pengaruh model deterministik terhadap model stokastik. Tujuan dari menentukan bifurkasi 1 adalah untuk mencari titik yang menyebabkan solusi model stokastik tidak mengikuti solusi determinsitik untuk pertama kalinya.

Bifurkasi 2 ditentukan melalui perubahan distribusi model. Bifurkasi 2 akan menentukan sifat *p-bifurcation* pada model. Tujuan dari menentukan bifurkasi 2 adalah untuk mencari perubahan distribusi pada model dari distribusi normal menjadi distribusi tidak normal untuk pertama kalinya.

2.9 Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov adalah dasar dari banyak uji nonparametrik *goodness-of-fit* untuk distribusi. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel yang kontinu dan $F_n(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif yang berdasarkan sampel. Hipotesis yang dapat dibentuk adalah

H_0: $F(x) = F_0(x)$, $\quad (\forall x)$ (data berdistribusi normal),

H_1: $F(x) \neq F_0(x)$, $\quad (\forall x)$ (data tidak berdistribusi normal),

untuk $F_0(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal.

Dalam prakteknya, uji Kolmogorov-Smirnov menguji distribusi pada dua sisi. Jika p-value $> \alpha$, maka data yang diuji berdistribusi normal. Jika p-value $< \alpha$, maka data yang diuji tidak berdistribusi normal [8].

2.10 Kajian Pustaka

Terdapat empat penelitian yang menjadi acuan dalam penelitian ini. Acuan pertama adalah jurnal tulisan Almaz Tesfay et al. pada tahun 2020 yang berjudul *Stochastic Bifurcation in Single-Species Model Induced by α-Stable Lévy Noise*. Dalam penelitian ini, model yang digunakan adalah *one-dimensional deterministic model* untuk memodelkan persamaan pertumbuhan dan model Verhulst. Proses stokastik yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Brownian motion* dan *The α-Stable Lévy*. Penyelesaian persamaan diferensial stokastik menggunakan metode *Fokker-Planck equation*. Kedua model akan melalui dua langkah yaitu, analisis model tanpa stokastik untuk menemukan titik bifurkasi pada model dan analisis model dengan stokastik untuk menganalisis *P-bifurcation* pada model pertumbuhan dan model Verhulst untuk menganalisis bifurkasi pada kedua model. Kesimpulan dalam penelitian ini adalah ada kemungkinan terjadinya kepunahan populasi pada model pertumbuhan dan tidak ada kemungkinan terjadinya kepunahan pada model Verhulst [6].

Acuan kedua adalah jurnal tulisan Vicenç Méndez et al. pada tahun 2015 yang berjudul *Stochastic Dynamics and Logistic Population Growth*. Penelitian ini dilakukan untuk observasi terhadap tingkat kelahiran dan kematian. Dalam penelitian ini, model yang digunakan adalah model Verhulst. Penelitian ini berfokus pada analisis tingkat kelahiran dan kematian. Penelitian dilakukan dengan melihat tiga kerjadian yaitu kelahiran, kematian, dan kompetisi. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *momentum-space spectral theory*. Kesimpulan yang diambil dari penelitian ini adalah dengan interaksi antara kelahiran dan kompetisi, populasi tidak akan mengalami kepunahan [9].

Acuan ketiga adalah jurnal tulisan J.H. Yang et al. pada tahun 2016 yang berjudul *Stochastic P-Bifurcation and Stochastic Resonance in A Noisy Bistable Fractional-Order System*. Penelitian ini dilakukan untuk meneliti pengaruh stokastik terhadap *noisy red bistable fractional-order system* ketika berada pada interval $(0,2]$. Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah melakukan algoritma numerik untuk *fractional-order non-linear system*. Langkah kedua adalah dengan melakukan analisis bifurkasi stokastik dengan metode *P-bifurcation*. Langkah terakhir adalah analisis dengan *stochastic resonance*. Kesimpulan pertama yang didapatkan dengan menggunakan algoritma numerik adalah hasil yang didapatkan dengan algoritma numerik lebih baik dari menggunakan metode Euler. Kesimpulan kedua yang didapatkan melalui analisis *p-bifurcation* adalah *noise* ditekan dalam proses ketika fungsi distribusi peluang stasioner berubah dari *single peak* ke *double peak*. Kesimpulan ketiga yang didapatkan melalui analisis *stochastic resonance* adalah terdapat resonansi kuat [7].

Acuan keempat adalah Skripsi tulisan Happy Cristanti yang berjudul Model Verhulst Deterministik dan Stokastik. Skripsi ini membahas model Verhulst dan beberapa pengembangannya. Penelitian ini melakukan analisis secara analitik dan analisa kualitatif dengan menggunakan grafik pada model Verhulst dan pengembangannya. Penelitian ini juga memodifikasi model Verhulst ke bentuk model stokastik dengan derau putih (σ) pada *Brownian motion*. Model stokastik akan diselesaikan secara analitik dengan kalkulus stokastik Ito. Kesimpulan yang didapat adalah ketika $\sigma = 0$, maka model deterministik adalah kasus khusus dari model stokastik [10].