BAB III

METODOLOGI

Bab ini akan membahas langkah-langkah untuk melakukan analisis bifurkasi stokastik pada model Verhulst. Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini dapat dilihat dari diagram alir (*flowchart*) pada Gambar 3.1.

3.1 Modifikasi Model

Model yang digunakan pada Skripsi ini adalah model Verhulst. Model Verhulst dibentuk dari *one-dimensional deterministic model* dengan bentuk:

$$\frac{dX}{dt} = Xf(X), \tag{3.1}$$

untuk $f(X)$ adalah pertumbuhan populasi per kapita terhadap X. Model Verhulst dapat dibentuk dengan subtitusi $f(X) = s\left(1 - \frac{X}{M}\right)$ dari persamaan (3.1), sehingga model Verhulst mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dX}{dt} = sX\left(1 - \frac{X}{M}\right), \quad X_0 = x_0, \tag{3.2}$$

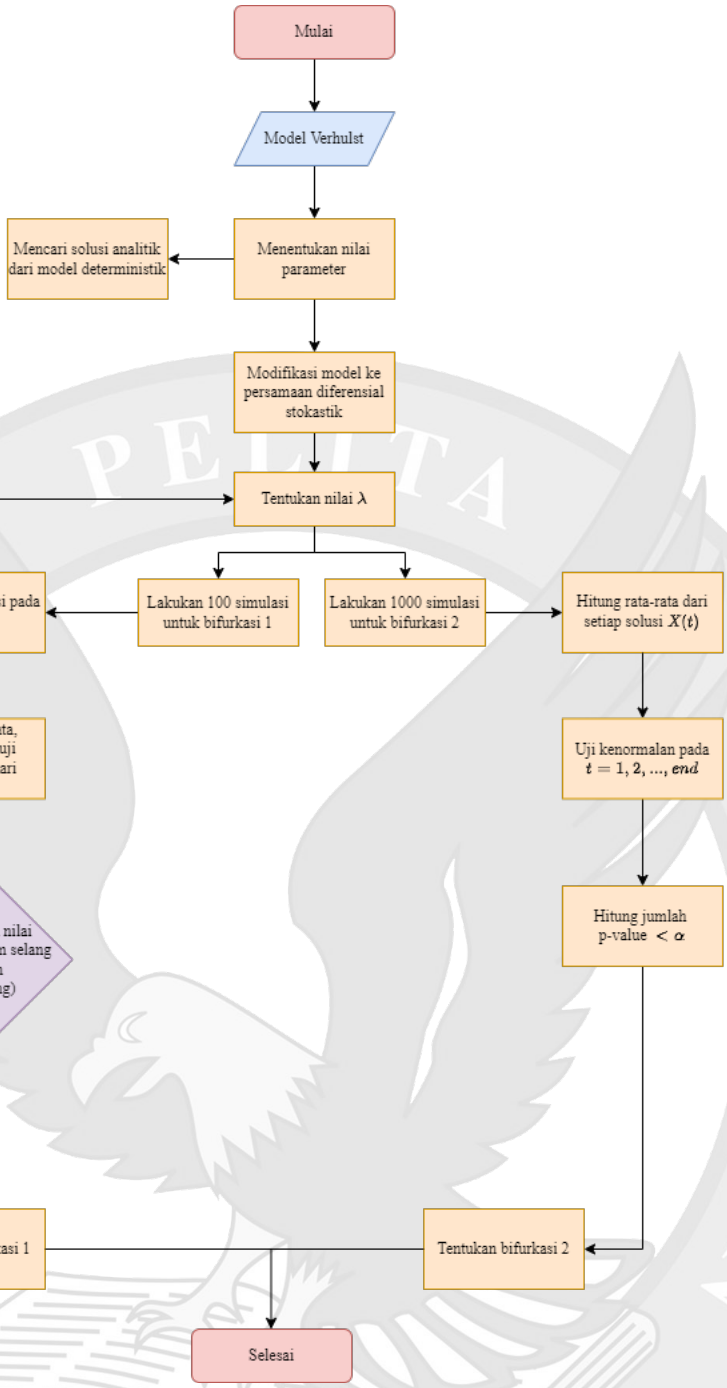
untuk X adalah ukuran populasi, s adalah tingkat pertumbuhan populasi, dan M adalah *carrying capacity* [6].

Model Verhulst akan dimodifikasi menjadi persamaan diferensial stokastik dengan proses stokastik *Brownian motion*. Persamaan diferensial stokastik mempunyai bentuk umum:

$$dX(t) = f(X(t),t)dt + g(X(t),t)dW(t), \quad t \in [t_0, T], \quad T > 0. \tag{3.3}$$

Persamaan (3.2) dapat dibentuk menjadi sebuah persamaan diferensial stokastik dengan *Brownian motion* dan *gaussian noise* λ sehingga diperoleh bentuk:

$$\frac{dX}{X} = s\left(1 - \frac{X}{M}\right)dt + \lambda dB_t, \tag{3.4}$$



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian

atau setara dengan,

$$dX = sX\left(1 - \frac{X}{M}\right)dt + \lambda X dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Parameter s, M, kondisi awal, dan titik t yang akan dievaluasi akan ditentukan pada awal analisis.

3.2 Solusi Analitik dari Model Deterministik

Model yang akan dianalisis pada subbab ini adalah persamaan (3.2). Solusi untuk persamaan (3.2) akan dicari secara analitik dengan menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Langkah pertama untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa adalah mencari solusi umum dari model. Solusi umum akan dicari dengan menggunakan aplikasi *Maple*. Langkah pertama penggunaan *Maple* adalah mendefinisikan persamaan diferensial ke dalam aplikasi. Solusi dari persamaan diferensial akan dicari menggunakan *dsolve*. Hasil dari *dsolve* adalah solusi umum dari persamaan yang didefinisikan. Setelah solusi umum didapatkan, tentukan solusi khusus dengan menggunakan nilai kondisi awal yang sudah diketahui.

3.3 Solusi Numerik dari Model Stokastik

Model yang akan dianalisis dalam subbab ini adalah persamaan (3.4). Solusi untuk persamaan (3.4) akan dicari dengan mengkombinasikan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial stokastik dan metode Monte Carlo. Langkah-langkah untuk melakukan simulasi Monte Carlo pada persamaan diferesnial stokastik adalah sebagai berikut.

1. Pilih *sample path* dari B_t berdasarkan distribusi normal.
2. Dengan menggunakan *sample path* yang didapatkan pada langkah 1 dan metode Euler, temukan solusi dari persamaan diferensial stokastik untuk *sample path* yang terbentuk.
3. Ulangi langkah 1 dan 2 kali untuk setiap λ.

Simulasi dilakukan dengan menggunakan aplikasi *Matlab*.

3.4 Menentukan Bifurkasi Stokastik

Bifurkasi stokastik yang akan dianalisis pada model ini adalah bifurkasi 1 dan bifurkasi 2.

3.4.1 Menentukan Bifurkasi 1

Langkah-langkah untuk menentukan bifurkasi 1 pada model adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai λ.

2. Lakukan satu simulasi pada nilai λ yang sudah ditentukan.

3. Lakukan 100 simulasi pada nilai λ yang sudah ditentukan dan kumpulkan solusi pada $X(end)$.

4. Konversikan semua $X(end)$ ke dalam file *.csv* dan periksa kenormalannya dengan uji Kolmogorov-Smirnov dengan hipotesis sebagai berikut.
   H_0: $F(x) = F_0(x), \quad (\forall x)$ (data berdistribusi normal),
   H_1: $F(x) \neq F_0(x), \quad (\forall x)$ (data tidak berdistribusi normal).

5. Hitung rata-rata dan variansi dari data tersebut.

6. Dengan metode *bootstrapping*, tentukan selang kepercayaan dari data tersebut. Langkah-langkah metode *bootstrapping* adalah sebagai berikut.

   (a) Ambil 100 data dari data yang tersedia dengan pengembalian.

   (b) Hitung rata-rata dari langkah (a).

   (c) Simpan rata-rata yang didapat pada langkah (b) dalam sebuah vektor.

   (d) Ulangi langkah (a) sampai (c) hingga 1000 kali.

   (e) Urutkan nilai vektor dari terkecil hingga terbesar.

   (f) Dengan $\alpha = 0,05$, ambil titik ke-26 sebagai batas bawah dan titik ke-975 sebagai batas atas dalam selang kepercayaan.

7. Periksa apakah nilai deterministik terdapat dalam selang kepercayaan. Jika terdapat nilai deterministik pada selang kepercayaan, maka ulangi langkah-langkah yang sudah dilakukan. Jika nilai deterministik tidak terdapat pada selang kepercayaan, maka nilai λ tersebut menjadi titik dugaan bifurkasi 1.

3.4.2 Analisis Bifurkasi 2

Langkah-langkah untuk menentukan bifurkasi 2 pada model adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai λ.

2. Lakukan 1000 simulasi pada nilai λ yang sudah ditentukan dan konversikan semua solusi $X(t)$ ke dalam file *.csv*.

3. Hitunglah rata-rata $X(t)$ untuk setiap t.

4. Periksa kenormalan dari $X(t)$ pada $t = 1, 2, 3, ..., end$ dengan uji Kolmogorov-Smirnov dengan hipotesis sebagai berikut.
   H_0: $F(x) = F_0(x), \quad (\forall x)$ (data berdistribusi normal),
   H_1: $F(x) \neq F_0(x), \quad (\forall x)$ (data tidak berdistribusi normal).

5. Hitung jumlah p-value yang menolak H_0.

6. Tentukan nilai λ yang menjadi dugaan pertama terjadinya bifurkasi 2.