BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Menentukan Parameter

Model deterministik yang akan digunakan adalah persamaan (3.2). Model stokastik yang akan digunakan adalah persamaan (3.4). Nilai s adalah 0,1 dan nilai M adalah 10. Konidsi awal yang akan digunakan dalam analisis kali ini adalah $X(0) = 5$. Lalu, akan dicari solusi numerik dari $X(t)$ mulai dari $t = 0$ sampai dengan $t = 100$.

4.2 Solusi Model Deterministik

Pada subbab ini, akan dicari solusi analitik dari model deterministik. Persamaan diferensial yang akan dicari solusinya adalah

$$\frac{dX}{dt} = 0,1X\left(1 - \frac{X}{10}\right), \quad X_0 = x_0 \tag{4.1}$$

dengan bantuan *Maple*, akan dicari solusi dari persamaan (4.1). Solusi umum dari persamaan (4.1) adalah

$$X(t) = \frac{10}{1 + 10e^{-0,1t}C}, \tag{4.2}$$

untuk C adalah konstanta. Dengan kondisi awal $X(0) = 5$, maka dapat dicari konstanta pada persamaan (4.2):

$$X(0) = 5 = \frac{10}{1 + 10e^{0}C}$$

$$C = 0,1.$$

Jadi, solusi khusus dari persamaan (4.2) adalah

$$X(t) = \frac{10}{1 + e^{-0,1t}}. \tag{4.3}$$

Dengan $t = 100$, maka $X(100) = 9,99954 \sim 10$.

4.3 Solusi Model Stokastik dan Analisis Bifurkasi

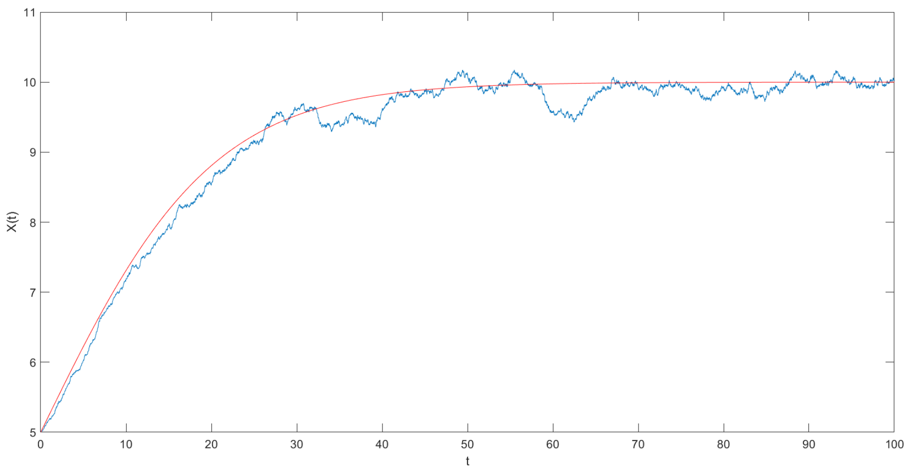
Pada subbab ini, akan ditentukan solusi numerik dari model stokastik dan analisis titik bifurkasi 1 dan bifurkasi 2. Model yang digunakan pada subbab ini adalah

$$dX = sX\left(1 - \frac{X}{M}\right)dt + \lambda X dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{4.4}$$

dengan $s = 0,1$, $M = 10$, dan $X_0 = 5$. Lalu, akan dicari solusi numerik dari X mulai dari $t = 0$ sampai dengan $t = 100$. Berdasarkan Bab 4.2, solusi model deterministik adalah $X(100) = 10$. Nilai λ pertama adalah 0,01 dan nilai berikutnya akan bertambah sebesar $0,01$. Pada gambar solusi model stokastik, garis merah menggambarkan solusi model deterministik dan garis biru menggambarkan solusi model stokastik. Asumsi α untuk penolakan H_0 adalah $\alpha = 0,05$.

4.3.1 Analisis Bifurkasi 1

Pertama, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,01$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.1. Berikutnya, akan



Gambar 4.1: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,01$ untuk Satu Simulasi

dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,01$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.2. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.3, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,9627 dan variansi dari data adalah 0,0535. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.4

```
data
9.8366
9.9815
10.285
9.8755
10.025
9.7164
9.9711
9.5694
9.8652
9.7654
```

Gambar 4.2: Data $\lambda = 0,01$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data1$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.12, p-value = 0.4676
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.3: Uji Normalitas $\lambda = 0,01$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data1$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.919146
```

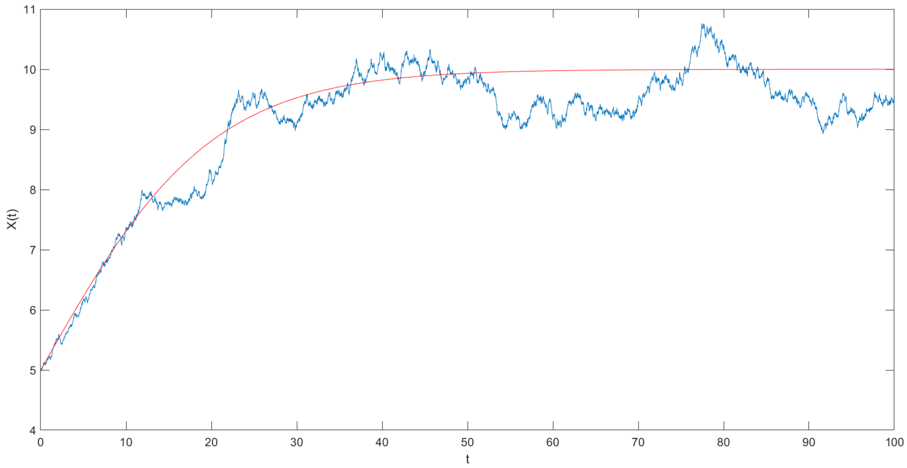
```
a[975]
```

```
## [1] 10.00732
```

Gambar 4.4: *Bootstrapping* $\lambda = 0,01$

merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,9191 < \mu < 10,0073$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,01$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,02$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.5. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,02$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.6. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.7, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari



Gambar 4.5: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,02$ untuk Satu Simulasi

data
9.9533
9.8642
10.297
9.8068
10.114
10.563
9.4907
9.6479
9.8987
10.344

Gambar 4.6: Data $\lambda = 0,02$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data2$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.06, p-value = 0.9938
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.7: Uji Normalitas $\lambda = 0,02$

data adalah 9,9713 dan variansi dari data adalah 0,2268. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.8 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,8794 < \mu < 10,0691$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,02$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,03$. Grafik yang

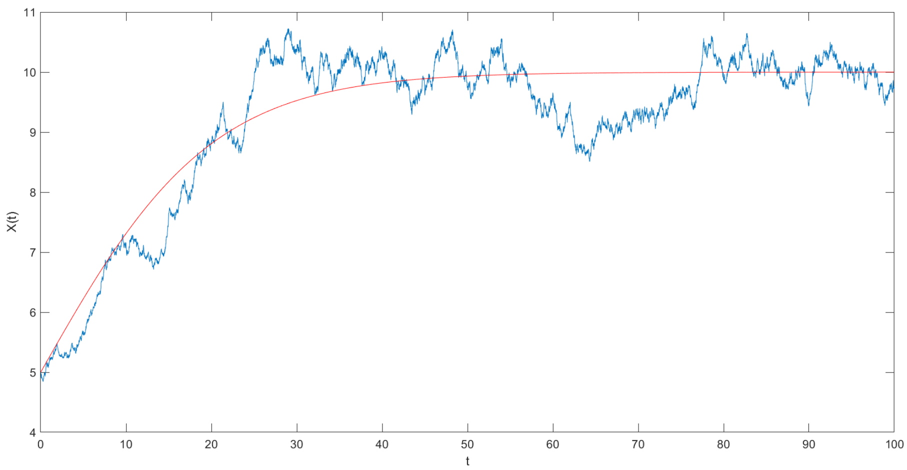
```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data2$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.879408
```

```
a[975]
```

```
## [1] 10.0691
```

Gambar 4.8: *Bootstrapping* $\lambda = 0,02$



Gambar 4.9: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,03$ untuk Satu Simulasi

```
data
9.5187
11.048
11.156
9.5397
10.001
10.667
10.683
10.128
9.7078
9.1938
```

Gambar 4.10: Data $\lambda = 0,03$

didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.9. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,03$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.10. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data3$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.12, p-value = 0.4676
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.11: Uji Normalitas $\lambda = 0,03$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data3$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.836256
```

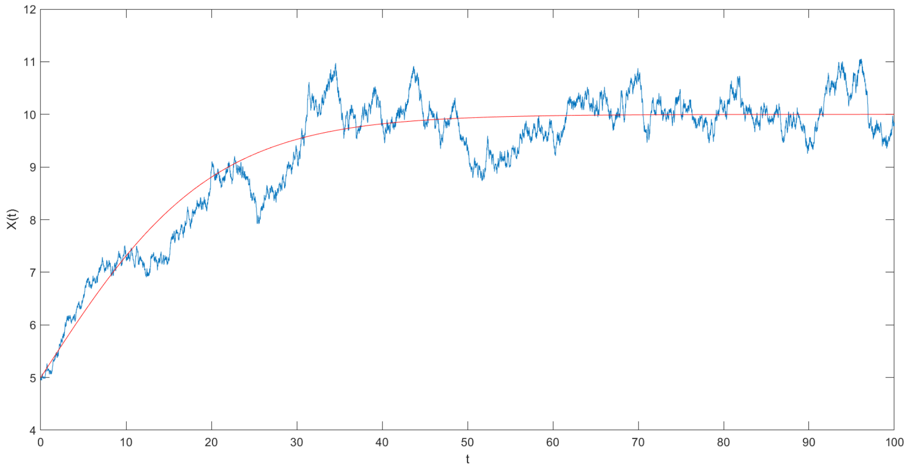
```
a[975]
```

```
## [1] 10.12505
```

Gambar 4.12: *Bootstrapping* $\lambda = 0,03$

Gambar 4.11, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,9768 dan variansi dari data adalah 0,5241. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.12 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,8362 < \mu < 10,125$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,03$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,04$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.13. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,04$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.14. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.15, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,9897 dan variansi dari data adalah 0,6448. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.16 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,8387 < \mu < 10,1543$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan



Gambar 4.13: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,04$ untuk Satu Simulasi

```
data
10.66
10.327
9.267
10.732
9.1004
10.602
10.101
10.422
8.9606
9.106
```

Gambar 4.14: Data $\lambda = 0,04$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data4$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.12, p-value = 0.4676
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.15: Uji Normalitas $\lambda = 0,04$

terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,04$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,05$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.17. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,05$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.18. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.19, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari

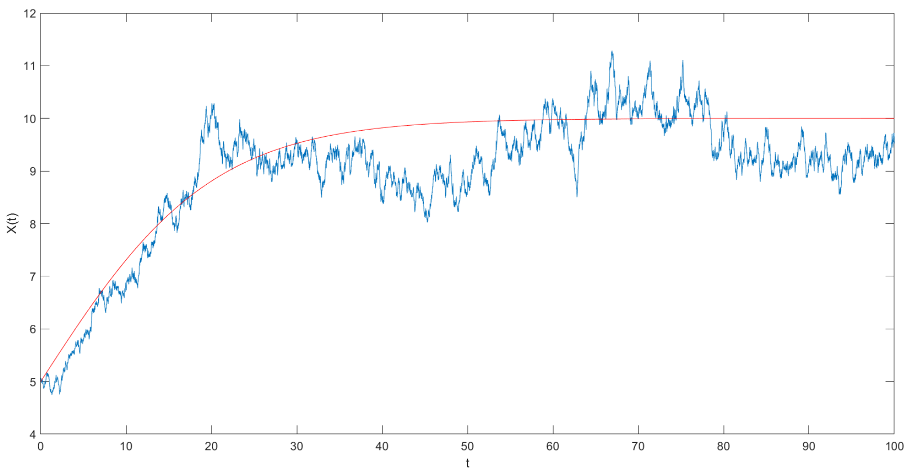
```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data4$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.838755
```

```
a[975]
```

```
## [1] 10.15436
```

Gambar 4.16: *Bootstrapping* $\lambda = 0,04$



Gambar 4.17: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,05$ untuk Satu Simulasi

data
9.3648
10.045
7.5881
10.95
10.589
10.197
9.5039
10.772
9.9051
11.877

Gambar 4.18: Data $\lambda = 0,05$

data adalah 9,9535 dan variansi dari data adalah 1,576. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.20 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,7157 < \mu < 10,199$. Nilai

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data5$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.09, p-value = 0.8127
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.19: Uji Normalitas $\lambda = 0,05$

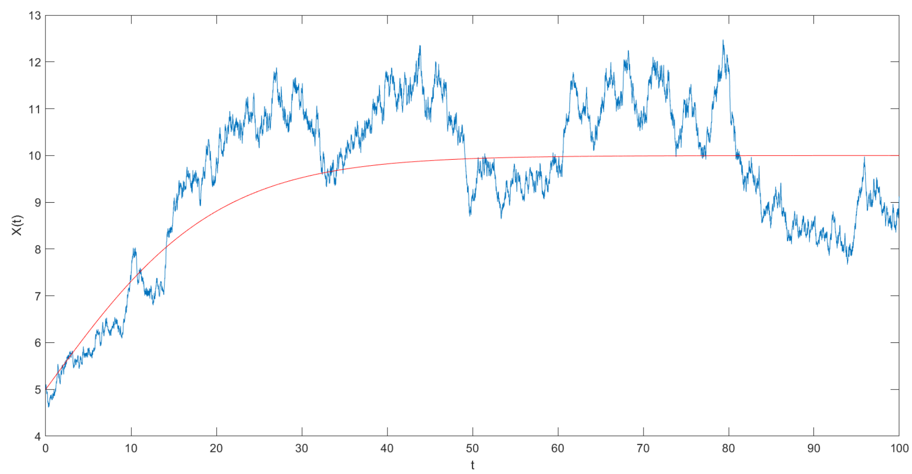
```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data5$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.715717
```

```
a[975]
```

```
## [1] 10.19906
```

Gambar 4.20: *Bootstrapping* $\lambda = 0,05$



Gambar 4.21: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,06$ untuk Satu Simulasi

deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,05$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,06$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.21. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,06$. Lalu, simpan semua solusi X

```
data
10.056
9.9258
10.889
6.4644
12.605
8.1869
9.6002
9.4371
10.031
8.5402
```

Gambar 4.22: Data $\lambda = 0,06$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data6$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.14, p-value = 0.281
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.23: Uji Normalitas $\lambda = 0,06$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data6$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.565643
```

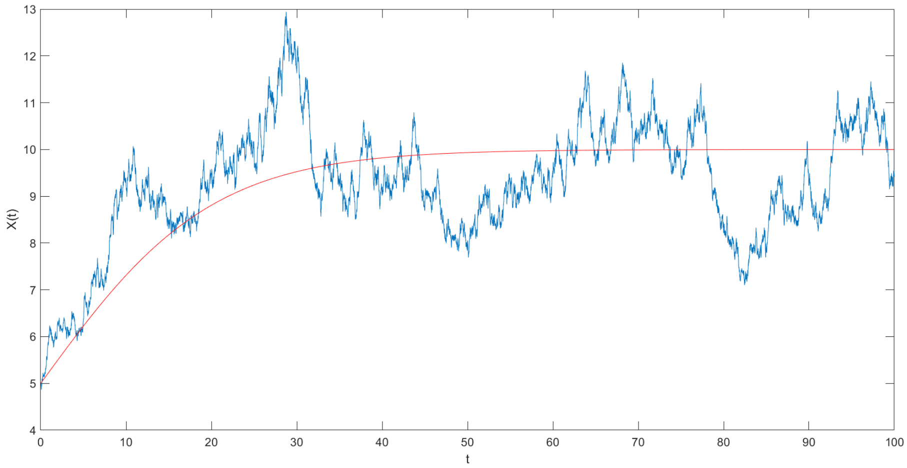
```
a[975]
```

```
## [1] 10.05231
```

Gambar 4.24: *Bootstrapping* $\lambda = 0,06$

pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.22. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.23, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,7944 dan variansi dari data adalah 1,6335. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.24 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,5656 < \mu < 10,0523$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,06$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,07$. Grafik yang



Gambar 4.25: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,07$ untuk Satu Simulasi

```
data
10.472
8.9637
8.2401
12.47
8.1664
9.1679
7.9431
9.4339
10.554
11.131
```

Gambar 4.26: Data $\lambda = 0,07$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data7$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.07, p-value = 0.9671
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.27: Uji Normalitas $\lambda = 0,07$

didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.25. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,07$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.26. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.27, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,7539 dan variansi dari data adalah 2,369. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.28

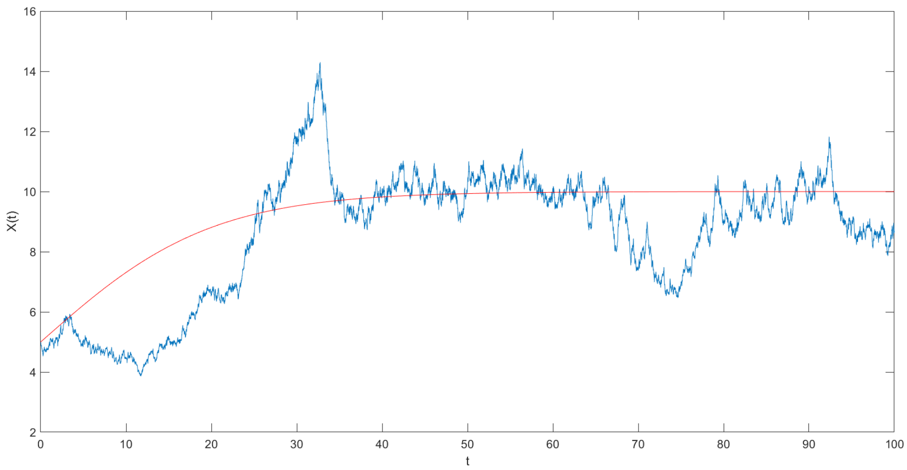
```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data7$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.446567
```

```
a[975]
```

```
## [1] 10.05887
```

Gambar 4.28: *Bootstrapping* $\lambda = 0,07$



Gambar 4.29: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,08$ untuk Satu Simulasi

merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,4465 < \mu < 10,0588$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,07$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,08$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.29. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,08$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.30. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.31, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,8424 dan variansi dari data adalah 3,5643. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.32 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan

```
data
7.1171
11.435
9.38
12.199
14.995
8.3872
10.119
10.714
8.873
7.4653
```

Gambar 4.30: Data $\lambda = 0,08$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data8$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.13, p-value = 0.3667
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.31: Uji Normalitas $\lambda = 0,08$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data8$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.486843
```

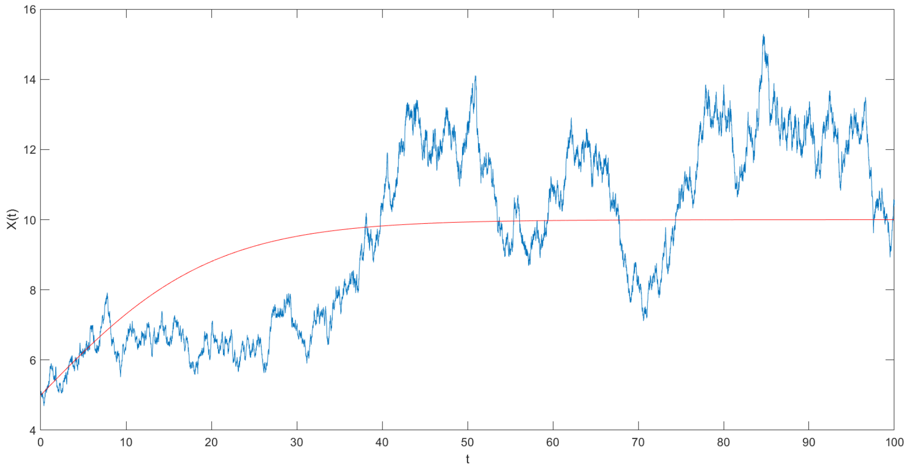
```
a[975]
```

```
## [1] 10.22918
```

Gambar 4.32: *Bootstrapping* $\lambda = 0,08$

$\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,4868 < \mu < 10,2291$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga belum ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,08$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,09$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.33. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,09$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.34. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.35, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,5745 dan variansi dari data adalah 3,6023. Selanjutnya, akan dicari



Gambar 4.33: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,09$ untuk Satu Simulasi

data
8.4763
8.1511
8.7543
8.718
11.634
10.248
9.5984
9.315
11.921
7.7977

Gambar 4.34: Data $\lambda = 0,09$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.18, p-value = 0.07832
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.35: Uji Normalitas $\lambda = 0,09$

selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.36 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,2062 < \mu < 9,9581$. Nilai deterministik tidak masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,09$.

Berdasarkan dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,09$, akan dilakukan pengecekan untuk $\lambda = 0,081$ sampai $\lambda = 0,089$. Pengecekan akan dimulai dari

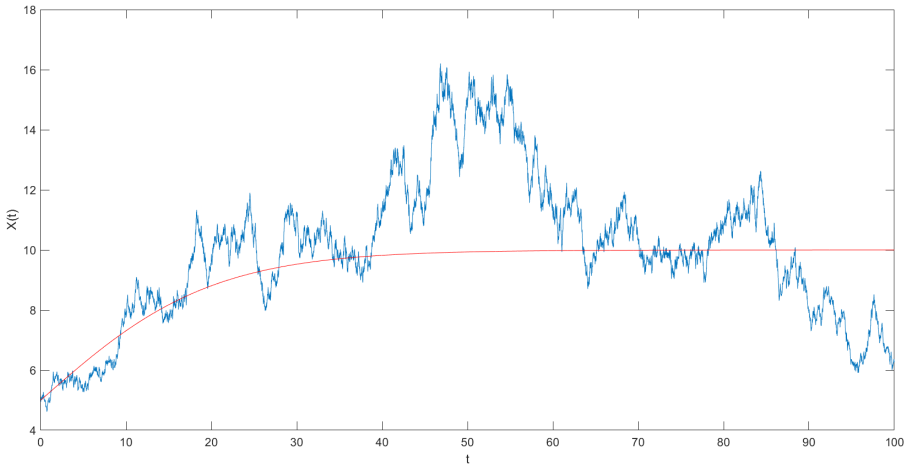
```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.206234
```

```
a[975]
```

```
## [1] 9.958105
```

Gambar 4.36: *Bootstrapping* $\lambda = 0,09$



Gambar 4.37: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,089$ untuk Satu Simulasi

```
data
11.13
11.741
7.1743
11.419
7.3112
7.0072
10.085
10.012
11.394
8.1077
```

Gambar 4.38: Data $\lambda = 0,089$

$\lambda = 0,089$ dan nilai berikutnya akan berkurang 0,001.

Pertama, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,089$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.37. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,089$. Lalu, simpan semua solusi X

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9a$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.11, p-value = 0.5806
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.39: Uji Normalitas $\lambda = 0,089$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9a$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.38666
```

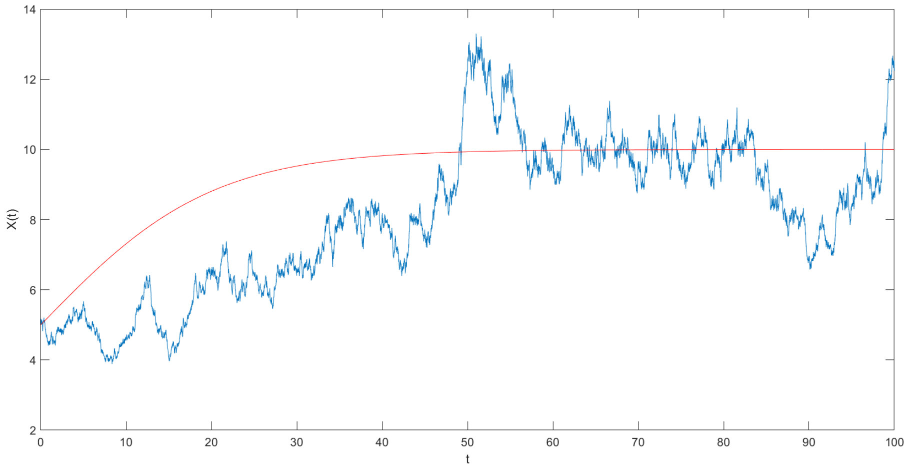
```
a[975]
```

```
## [1] 10.12341
```

Gambar 4.40: *Bootstrapping* $\lambda = 0,089$

pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.38. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.39, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,7481 dan variansi dari data adalah 4,0076. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.40 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,3866 < \mu < 10,1234$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga tidak ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,089$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,088$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.41. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,088$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.42. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.43, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,8482 dan variansi dari data adalah 3,1031. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.44 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan



Gambar 4.41: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,088$ untuk Satu Simulasi

```
data
7.8741
7.8236
11.404
8.8297
12.522
10.206
10.448
11.687
9.1618
9.316
```

Gambar 4.42: Data $\lambda = 0,088$

```
##
##   Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9b$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.13, p-value = 0.3667
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.43: Uji Normalitas $\lambda = 0,088$

$\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,4921 < \mu < 10,1925$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga tidak ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,088$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,087$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.45. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,087$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$

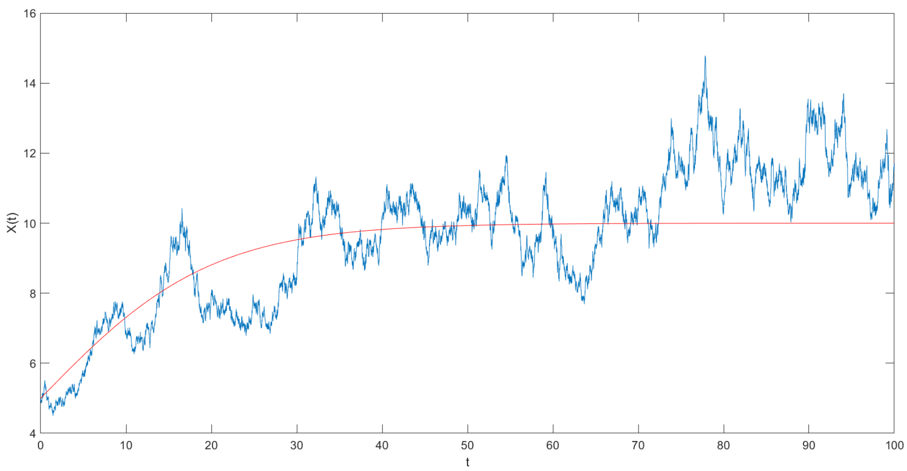
```r
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9b$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.492175
```

```r
a[975]
```

```
## [1] 10.19254
```

Gambar 4.44: *Bootstrapping* $\lambda = 0,088$



Gambar 4.45: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,087$ untuk Satu Simulasi

data
6.5187
7.2256
9.2174
6.764
7.8932
10.25
7.8639
13.112
10.823
12.466

Gambar 4.46: Data $\lambda = 0,087$

dapat dilihat pada Gambar 4.46. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.47, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,6613 dan variansi dari data adalah 5,0868. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.48

```
##
##   Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9c$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.08, p-value = 0.9062
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.47: Uji Normalitas $\lambda = 0,087$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9c$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.228534
```

```
a[975]
```

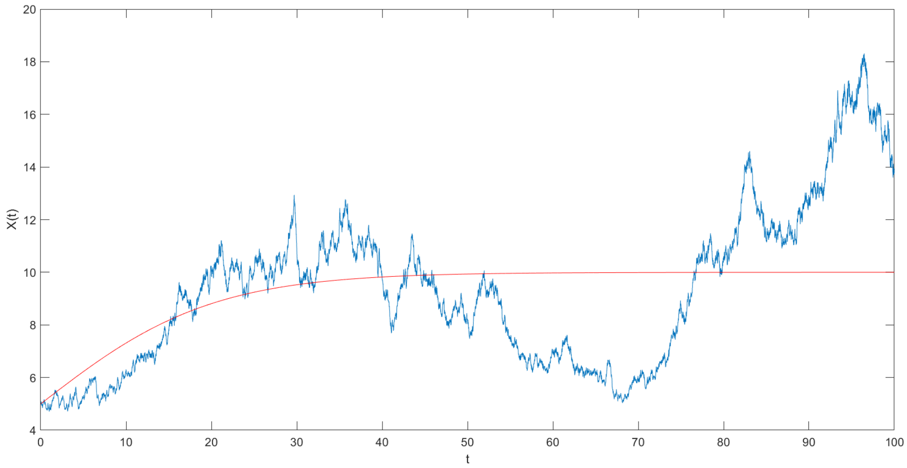
```
## [1] 10.11056
```

Gambar 4.48: *Bootstrapping* $\lambda = 0,087$

merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,2285 < \mu < 10,1105$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga tidak ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,087$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,086$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.49. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,086$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.50. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.51, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,5241 dan variansi dari data adalah 2,9894. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.52 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,206 < \mu < 9,8726$. Nilai deterministik tidak masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,086$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,085$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.53. Berikutnya,



Gambar 4.49: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,086$ untuk Satu Simulasi

```
data
10.37
10.454
11.572
10.881
8.0007
9.9375
8.5441
8.9324
9.1808
8.9728
```

Gambar 4.50: Data $\lambda = 0,086$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9d$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.09, p-value = 0.8127
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.51: Uji Normalitas $\lambda = 0,086$

akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,085$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.54. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.55, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,4555 dan variansi dari data adalah 3,4534. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.56 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan

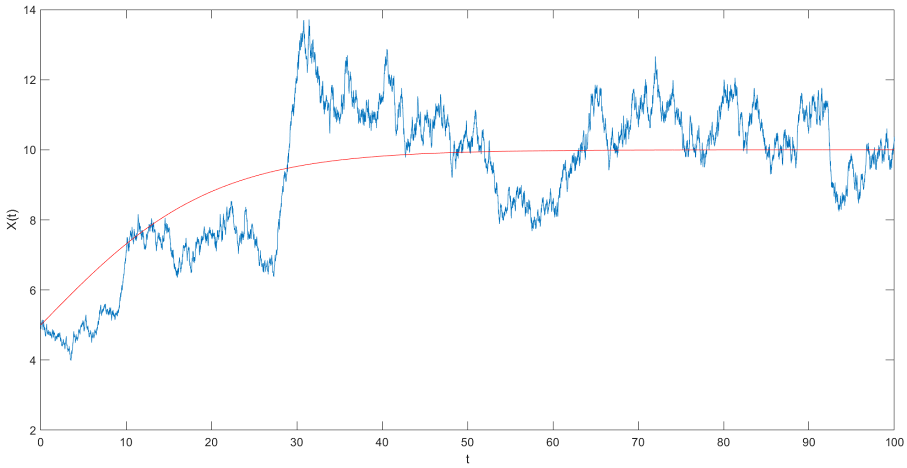
```r
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9d$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.206085
```

```r
a[975]
```

```
## [1] 9.872622
```

Gambar 4.52: *Bootstrapping* $\lambda = 0,086$



Gambar 4.53: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,085$ untuk Satu Simulasi

data
10.174
8.055
10.572
13.149
9.0995
8.7963
8.948
8.0844
9.6056
7.7949

Gambar 4.54: Data $\lambda = 0,085$

$\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,126 < \mu < 9,8199$. Nilai deterministik tidak masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,085$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,084$. Grafik yang

```
##
##   Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9e$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.09, p-value = 0.8127
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.55: Uji Normalitas $\lambda = 0,085$

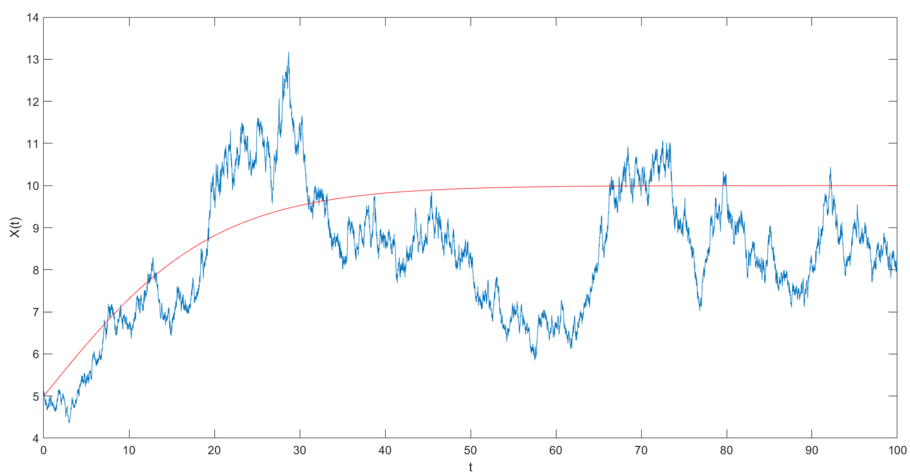
```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9e$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.126072
```

```
a[975]
```

```
## [1] 9.819944
```

Gambar 4.56: *Bootstrapping* $\lambda = 0,085$



Gambar 4.57: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,084$ untuk Satu Simulasi

didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.57. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,084$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.58. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.59, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari

```
data
9.053
6.9998
13.418
8.3857
8.3313
7.5265
15.256
8.0373
9.6617
8.2641
```

Gambar 4.58: Data $\lambda = 0,084$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9f$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.1, p-value = 0.6994
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.59: Uji Normalitas $\lambda = 0,084$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9f$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.483436
```

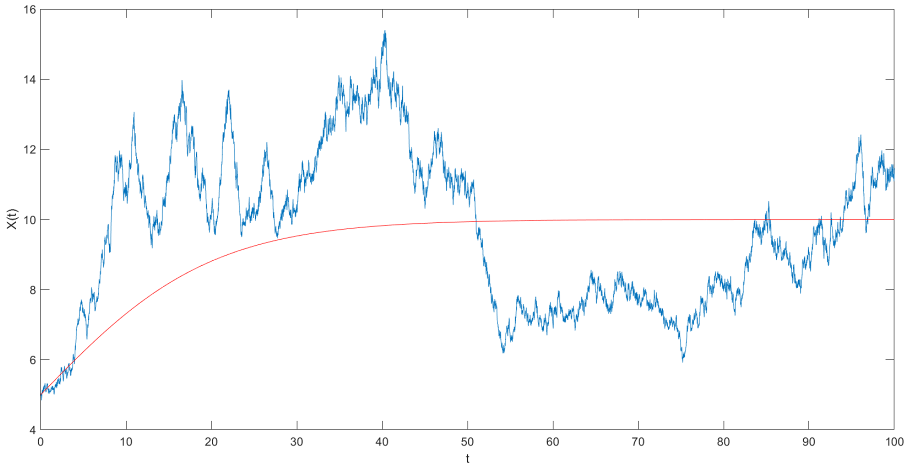
```
a[975]
```

```
## [1] 10.19766
```

Gambar 4.60: *Bootstrapping* $\lambda = 0,084$

data adalah 9,8166 dan variansi dari data adalah 3,6039. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.60 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,4834 < \mu < 10,1976$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga tidak ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,084$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,083$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.61. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,083$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$



Gambar 4.61: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,083$ untuk Satu Simulasi

```
data
10.671
12.724
10.316
9.9712
8.2714
10.561
12.771
11.867
9.0634
8.6602
```

Gambar 4.62: Data $\lambda = 0,083$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9g$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.11, p-value = 0.5806
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.63: Uji Normalitas $\lambda = 0,083$

dapat dilihat pada Gambar 4.62. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.63, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,5548 dan variansi dari data adalah 3,1022. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.64 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,2146 < \mu < 9,9053$. Nilai deterministik tidak masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga ada dugaan

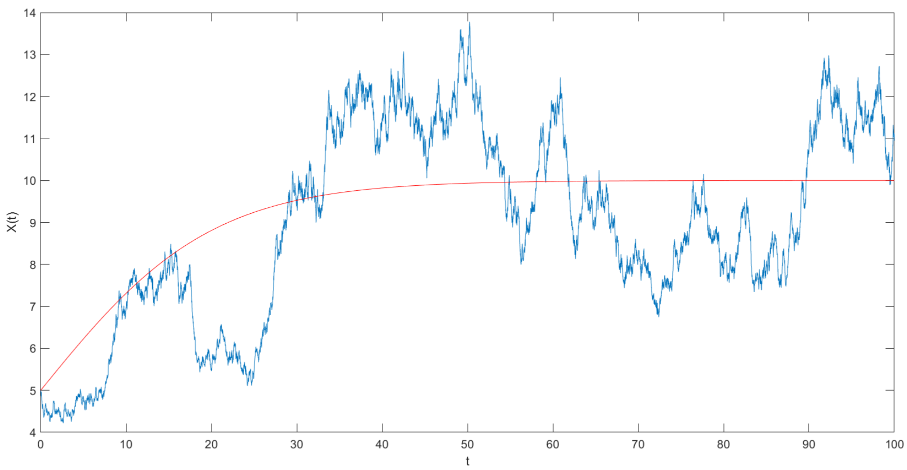
```r
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9g$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.214616
```

```r
a[975]
```

```
## [1] 9.905345
```

Gambar 4.64: *Bootstrapping* $\lambda = 0,083$



Gambar 4.65: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,082$ untuk Satu Simulasi

data
8.5431
10.391
7.0349
10.835
9.1305
9.1612
8.3068
7.3859
9.7207
7.4445

Gambar 4.66: Data $\lambda = 0,082$

terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,083$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,082$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.65. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,082$. Lalu, simpan semua solusi X

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9h$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.07, p-value = 0.9671
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.67: Uji Normalitas $\lambda = 0,082$

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9h$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.319635
```

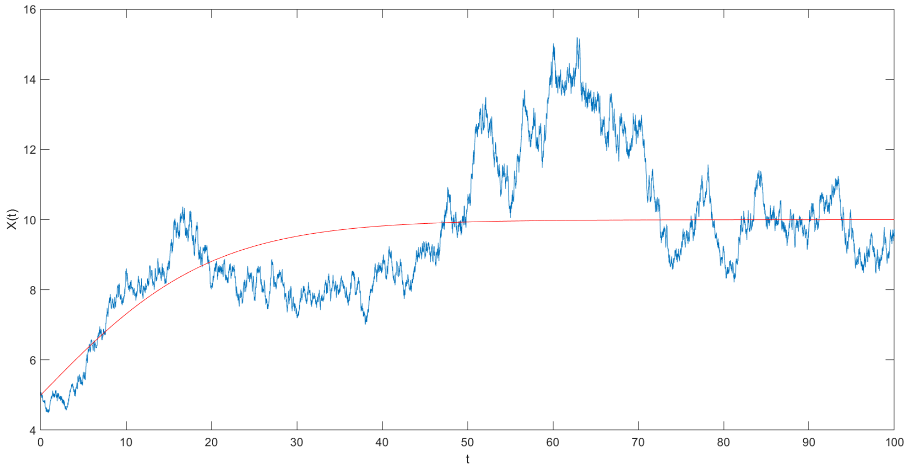
```
a[975]
```

```
## [1] 10.09658
```

Gambar 4.68: *Bootstrapping* $\lambda = 0,082$

pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.66. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.67, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,692 dan variansi dari data adalah 3,381. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.68 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,3196 < \mu < 10,0965$. Nilai deterministik masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga tidak ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,082$.

Selanjutnya, akan dilakukan satu simulasi pada $\lambda = 0,081$. Grafik yang didapatkan melalui satu kali simulasi adalah seperti Gambar 4.69. Berikutnya, akan dilakukan 100 kali simulasi pada $\lambda = 0,081$. Lalu, simpan semua solusi X pada $t = 100$ dan konversikan ke bentuk *.csv*. Sebagian simulasi pada $t = 100$ dapat dilihat pada Gambar 4.70. Lalu, akan diuji normalitas dari data. Berdasarkan Gambar 4.71, p-value $> 0,05$ yang berarti data berdistribusi normal. Rata-rata dari data adalah 9,5551 dan variansi dari data adalah 3,077. Selanjutnya, akan dicari selang kepercayaan dari data dengan metode *bootstrapping*. Gambar 4.72 merupakan selang kepercayaan yang dibentuk dengan *bootstrapping*. Dengan $\alpha = 0,05$, selang kepercayaan pada data adalah $9,2084 < \mu < 9,8868$. Nilai



Gambar 4.69: Solusi Model Stokastik $\lambda = 0,081$ untuk Satu Simulasi

data
8.8214
9.2446
6.1793
9.478
7.7059
9.7532
7.8645
9.4902
10.454
7.8195

Gambar 4.70: Data $\lambda = 0,081$

```
##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  data9i$data and rnorm(l, m, s)
## D = 0.07, p-value = 0.9671
## alternative hypothesis: two-sided
```

Gambar 4.71: Uji Normalitas $\lambda = 0,081$

deterministik tidak masuk ke dalam selang kepercayaan sehingga ada dugaan terjadi bifurkasi pada $\lambda = 0,081$.

Berdasarkan pengecekan yang dilakukan, terdapat dugaan terjadinya bifurkasi 1 pada $\lambda = 0,081$, $\lambda = 0,083$, $\lambda = 0,085$, dan $\lambda = 0,086$. Berdasarkan pengecekan, terdapat dugaan terjadinya bifurkasi 1 pada $0,08 \leq \lambda \leq 0,09$.

```
sim = NULL
for(i in 1:1000){
  w = sample(data9i$data,100,replace = TRUE)
  sim[i] = mean(w)
}
a = sort(sim)
a[26]
```

```
## [1] 9.20844
```

```
a[975]
```

```
## [1] 9.886875
```

Gambar 4.72: *Bootstrapping* $\lambda = 0,081$

4.3.2 Analisis Bifurkasi 2

Pertama, akan dilakukan 1000 simulasi pada $\lambda = 0,1$ hingga $\lambda = 0,25$[1]. Kemudian, akan dicari rata-rata dari setiap solusi $X(t)$ pada setiap λ. Lalu, periksa kenormalan dari solusi $X(t)$ pada $t = 1,2,3,...,100$ dengan uji Kolmogorov-Smirnov. Terdapat 100 p-value yang dihasilkan untuk setiap λ. Dengan $\alpha = 0,05$, akan dicari persentase dari p-value $< 0,05$ atau tidak berdistribusi normal. Hasil uji kenormalan disajikan dalam Tabel 4.1.

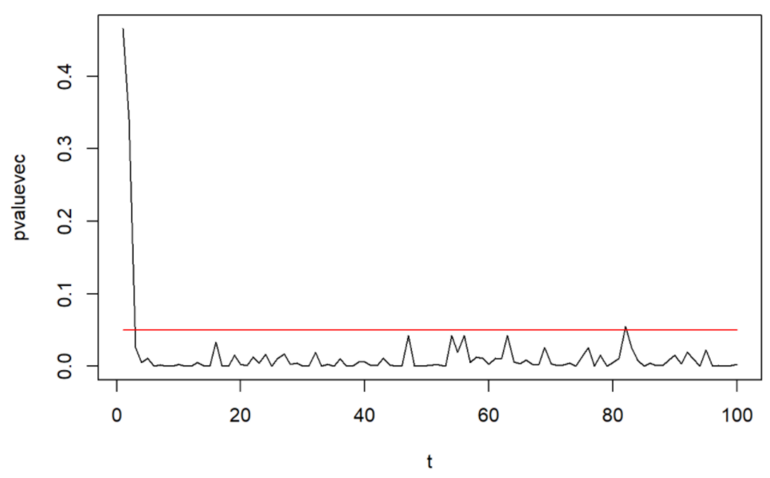
Tabel 4.1: Persentase p-value $< 0,05$

No	λ	Jumlah P-value $< 0,05$	Persentase
1	0,1	17	17%
2	0,11	31	31%
3	0,12	35	35%
4	0,13	38	38%
5	0,14	67	67%
6	0,15	56	56%
7	0,16	63	63%
8	0,17	68	68%
9	0,18	77	77%
10	0,19	87	87%
11	0,2	87	87%
12	0,21	97	97%
13	0,22	100	100%

[1]Link data: tinyurl.com/datamtlb

14	0,23	98	98%
15	0,24	100	100%
16	0,25	99	99%

Pada saat $\lambda = 0,1$, terdapat 17% p-value dari solusi $X(t)$ yang tidak berdistribusi normal. Dengan bertambahnya nilai λ, jumlah p-value $< 0,05$ semakin bertambah. Pada saat $\lambda = 0,14$, p-value dari solusi $X(t)$ yang tidak berdistribusi normal sudah diatas 50%. Pertama kali persentase p-value $< 0,05$ mencapai 100% ketika $\lambda = 0,22$. Jadi, $\lambda = 0,21$ menjadi dugaan pertama terjadinya bifurkasi 2 karena persentase p-value $< 0,05$ mencapai 100% untuk pertama kalinya terjadi setelah $\lambda = 0,21$. Garis merah pada Gambar 4.73 merupakan nilai $\alpha = 0,05$. Berdasarkan analisis, terdapat dugaan terjadinya bifurkasi 2 pada $0,2 \leq \lambda \leq 0,21$.



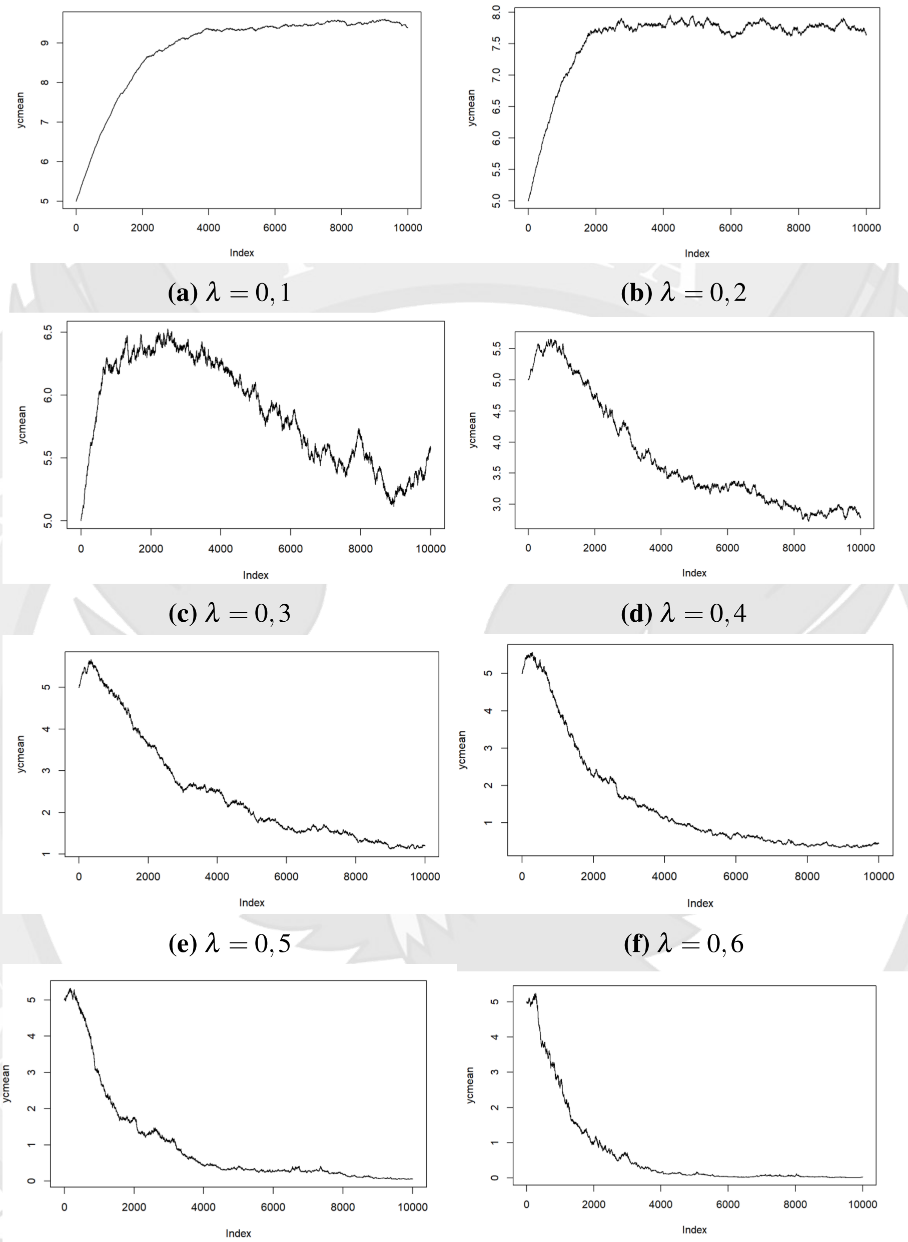
Gambar 4.73: P-value $\lambda = 0,21$

4.4 Analisis Kepunahan Populasi

Pada subbab ini, akan dianalisis nilai λ yang mungkin dapat menyebabkan kepunahan dari suatu populasi. Populasi dikatakan punah jika $X(t) = 0$. Nilai λ yang akan dianalisis dimulai dari $\lambda = 0,1$ dan akan bertambah sebesar $0,1$ untuk nilai λ berikutnya. Analisis akan dilakukan dengan membentuk grafik dari rata-rata solusi $X(t)$ yang dilakukan sebanyak 1000 kali.

Berdasarkan Gambar 4.74, nilai λ yang akan dianalisis adalah dari $\lambda = 0,1$

hingga $\lambda = 0,8$[2]. Jika nilai λ semakin besar, maka solusi $X(t)$ akan semakin cenderung mendekati nol. Pada saat $\lambda = 0,8$ yang terlihat pada Gambar 4.74h, solusi $X(t)$ terlihat sudah mendekati nol. Jadi, sudah ada kemungkinan populasi akan punah pada saat $\lambda = 0,8$.



(a) $\lambda = 0,1$ **(b)** $\lambda = 0,2$

(c) $\lambda = 0,3$ **(d)** $\lambda = 0,4$

(e) $\lambda = 0,5$ **(f)** $\lambda = 0,6$

(g) $\lambda = 0,7$ **(h)** $\lambda = 0,8$

Gambar 4.74: Grafik Rata-Rata Solusi $X(t)$

[2]Link data: tinyurl.com/datamtlb